

## ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МАГИСТРАТУРУ ПО КОНКУРСНЫМ ГРУППАМ ФАКТ

Вступительное испытание состоит из письменной части (длительность - 2 часа) и собеседования (ориентировочно через два часа после окончания письменной части). Итоговая оценка по предмету ставится по результатам обеих частей испытания.

- Предел числовой последовательности и его свойства. Критерий Коши. Частичный предел, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
- Предел в точке функции одной переменной и его свойства. Эквивалентность двух определений предела по Коши и Гейне. Критерий Коши.
- Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывной функции на отрезке: теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.
- Производная в точке функции одной переменной и её свойства. Производная суперпозиции функций. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал функции. Дифференцирование обратной функции.
- Производные высших порядков функции одной переменной. Формула Лейбница.
- Теоремы о среднем для дифференцируемых функций Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталья.
- Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.
- Исследование функции одной переменной с помощью производных: монотонность, экстремумы, выпуклость, перегибы.
- Дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимые условия и достаточные условия дифференцируемости.
- Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.
- Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия и достаточные условия локального экстремума.
- Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа, необходимые и достаточные условия условного экстремума.
- Определённый интеграл. Критерий Дарбу интегрируемости функции. Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница.
- Несобственный интеграл. Абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши, признаки сравнения и признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.
- Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши, признаки сравнения, интегральный признак, признаки Лейбница и Дирихле сходимости числовых рядов.
- Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости.
- Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
- Криволинейные интегралы. Формула Грина.
- Поверхностные интегралы. Формула Остроградского-Гаусса и формула Стокса.
- Теорема Римана об осцилляции. Тригонометрический ряд Фурье. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Условия равномерной сходимости ряда Фурье.

- Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
- Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами. Полные системы в нормированных пространствах.
- Различные способы задания прямой и плоскости. Углы между прямыми и плоскостями. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости. Расстояние междускрещивающимися прямыми.
- Кривые второго порядка. Эллипс, парабола, гипербола и их свойства.
- Аффинное преобразование плоскости и его свойства. Главные направления аффинного преобразования. Геометрический смысл знака и модуля определителя матрицы аффинного преобразования.
- Ортогональное преобразование плоскости и его свойства. Представление аффинного преобразования суперпозицией ортогонального преобразования и двух сжатий.
- Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема Фредгольма. Общее решение линейной алгебраической системы уравнений.
- Линейное преобразование конечномерного пространства, его матрица. Формула изменения матрицы линейного преобразования при замене базиса. Собственные векторы и собственные значения, их свойства.
- Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду.
- Конечномерные евклидовы пространства. Матрица Грама. Сопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства и его свойства.
- Самосопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства, свойства его собственных значений и собственных векторов.
- Обыкновенные дифференциальные уравнения. Метод разделения переменных. Методы понижения порядка уравнения, метод введения параметра.
- Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы уравнений с постоянными коэффициентами. Методы их решения.
- Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных.
- Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Необходимое условие слабого локального экстремума.
- Положение равновесия автономной системы дифференциальных уравнений. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия.
- Первые интегралы автономной системы дифференциальных уравнений. Теорема о числе независимых первых интегралов. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных, общее решение и задача Коши.
- Вероятностное пространство. Независимые события. Теорема сложения. Условная вероятность. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

- Случайная величина и её функция распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.
- Испытания Бернулли. Неравенство Чебышева и закон больших чисел.
- Регулярные функции комплексного переменного. Интегральная формула Коши. Функции, регулярные в кольце. Ряд Лорана.
- Вычет в изолированной особой точке. Вычисление интегралов при помощи вычетов. Лемма Жордана.
- Регулярные ветви многозначных комплексных функций  $\ln(z)$  и их применение для вычисления интегралов.
- Конформные отображения. Дробно-линейное отображение и его свойства. Функция Жуковского и её свойства.
- Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка двух переменных, гиперболических в заданной области. Метод характеристик поиска общего решения и решения задачи Коши.
- Задача Коши для уравнения колебаний струны и одномерного уравнения теплопроводности. Формулы Даламбера и Пуассона.
- Смешанная задача для уравнения колебаний полубесконечной струны. Условия согласования начальных и граничных условий.
- Задача Коши для волнового уравнения в трёхмерном пространстве. Формула Кирхгофа.
- Внутренняя и внешняя задачи Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона для круга и шара.
- Метод Фурье решения смешанной начально-краевой задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.
- Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным интегральным ядром.

## Литература

- Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
- С. М. Никольский. Курс математического анализа.
- А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа.
- Г. Н. Яковлев. Лекции по математическому анализу.
- Г. Е. Иванов. Лекции по математическому анализу.
- О. В. Бесов. Лекции по математическому анализу.
- А. Ю. Петрович. Лекции по математическому анализу.
- А. Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
- В. И. Чехлов. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре.
- Д. В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
- Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
- В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
- М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
- В. К. Захаров, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, Теория вероятностей.
- В. П. Чистяков. Курс теории вероятностей.
- Е. С. Половинкин. Курс лекций по теории функций комплексного переменного.
- М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. Теория функций комплексного переменного.

- В. С. Владимиров. Уравнения математической физики.
- В. П. Михайлов. Лекции по уравнениям математической физики.
- В. М. Уроев. Уравнения математической физики.
- М. А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики.